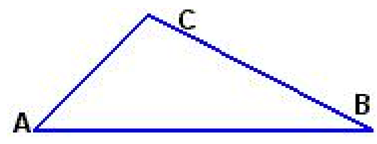
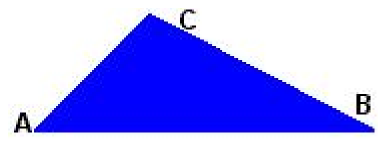
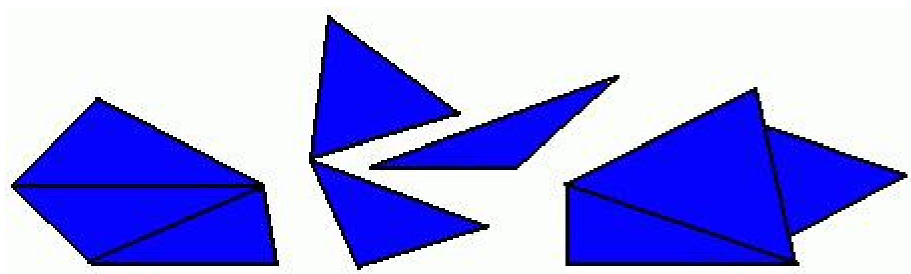
Triângulo e região triangular

No desenho abaixo, o triângulo ABC é a reunião dos segmentos de reta AB, BC e AC. A reunião de todos os pontos localizados no triângulo e também dentro do triângulo é chamada uma região triangular. A região triangular ABC é limitada pelo triângulo ABC. Os pontos dos lados do triângulo ABC bem como os pontos do interior do triângulo ABC são pontos da região triangular.

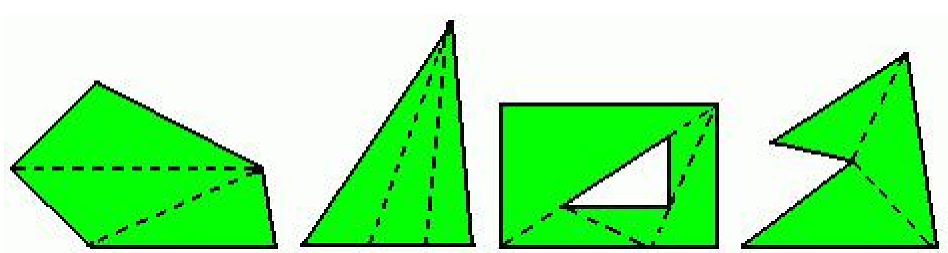
Triângulo ABC	Região triangular ABC
	

Duas ou mais regiões triangulares não são sobrepostas, se a interseção é vazia, é um ponto ou é um segmento de reta. Cada uma das regiões planas abaixo é a reunião de três regiões triangulares não sobrepostas.

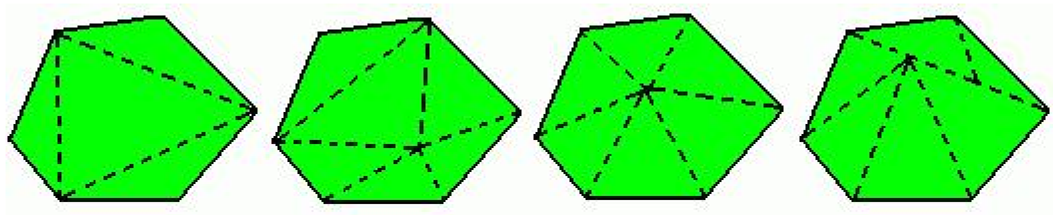


O conceito de região poligonal

Uma região poligonal é a reunião de um número finito de regiões triangulares não-sobrepostas e coplanares (estão no mesmo plano). Na gravura abaixo, apresentamos quatro regiões poligonais. Observe que uma região triangular é por si mesmo uma região poligonal e além disso uma região poligonal pode conter "buracos".



Uma região poligonal pode ser decomposta em várias regiões triangulares e isto pode ser feito de várias maneiras



Duas ou mais regiões poligonais são não-sobrepostas quando a interseção de duas regiões quaisquer, é vazia, é um conjunto finito de pontos, é um segmento de reta ou é um conjunto finito de pontos e um segmento de reta.

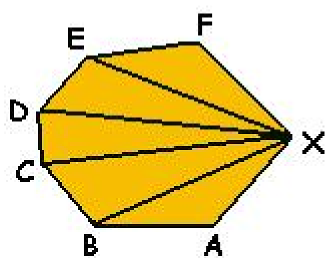
O estudo de área de regiões poligonais depende de alguns conceitos primitivos:

1. A cada região poligonal corresponde um único número real positivo chamado área.
2. Se dois triângulos são congruentes então as regiões limitadas por eles possuem a mesma área.
3. Se uma região poligonal é a reunião de n regiões poligonais não-sobrepostas então sua área é a soma das áreas das n-regiões.

Observação: Para facilitar o estudo de regiões poligonais, adotaremos as seguintes práticas:

a. Os desenhos de regiões poligonais serão sombreadas apenas quando houver possibilidade de confusão entre o polígono e a região.
b. Usaremos expressões como *a área do triângulo ABC* e *a área do retângulo RSTU* no lugar de expressões como *a área da região triangular ABC* e *a área da região limitada pelo retângulo RSTU*.

Exemplo: A área da figura poligonal ABCDEFX pode ser obtida pela decomposição da região poligonal em regiões triangulares.

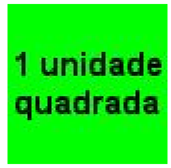


Após isto, realizamos as somas dessas áreas triangulares.

Área(ABCDEFX)=área(XAB)+área(XBC)+...+área(XEF)

Unidade de área

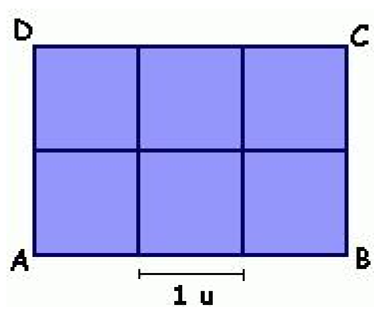
Para a unidade de medida de área, traçamos um quadrado cujo lado tem uma unidade de comprimento.



Esta unidade pode ser o metro, o centímetro, o quilômetro, etc.

Área do Retângulo

A figura ao lado mostra o retângulo ABCD, que mede 3 unidades de comprimento e 2 unidades de altura. O segmento horizontal que passa no meio do retângulo e os segmentos verticais, dividem o retângulo em seis quadrados tendo cada um 1 unidade de área.



A área do retângulo ABCD é a soma das áreas destes seis quadrados. O número de unidades de área do retângulo coincide com o obtido pelo produto do número de unidades do comprimento da base AB pelo número de unidades da altura BC.

O lado do retângulo pode ser visto como a base e o lado adjacente como a altura, assim, a área A do retângulo é o produto da medida da base b pela medida da altura h.

$$A = b \times h$$

Área do quadrado

Um quadrado é um caso particular de retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura. A área do quadrado pode ser obtida pelo produto da medida da base por si mesma.

Esta é a razão pela qual a segunda potência do número x, indicada por x^2, tem o nome de *quadrado de x* e a área A do quadrado é obtida pelo quadrado da medida do lado x.

$$A = x^2$$

Exemplo: Obter a área do retângulo cujo comprimento da base é 8 unidades e o comprimento da altura é 5 unidades.

$A = b \times h$

$A = (8u)x(5u) = 40u^2$

No cálculo de áreas em situações reais, usamos medidas de comprimento em função de alguma certa unidade como: metro, centímetro, quilômetro, etc...

Exemplo: Para calcular a área de um retângulo com 2 m de altura e 120 cm de base, podemos expressar a área em metros quadrados ou qualquer outra unidade de área.

1. Transformando as medidas em metros

   Como h=2m e b=120cm=1,20m, a área será obtida através de:

   $A = b \times h$

   $A = (1{,}20m) \times (2m) = 2{,}40m^2$

2. Transformando as medidas em centímetros

   Como h=2m=200cm e b=120cm, a área do retângulo será dada por:

   $A = b \times h$

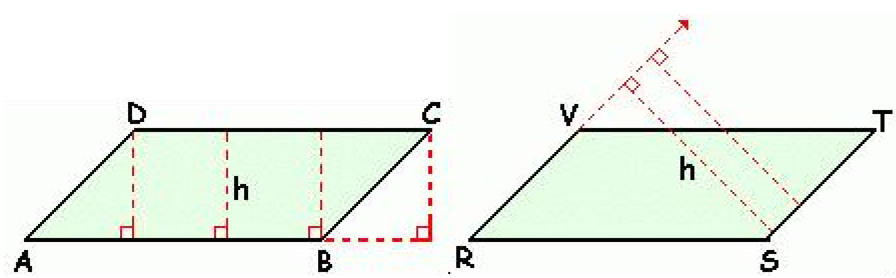
   $A = (120cm) \times (200cm) = 24000cm^2$

Área do Paralelogramo

Combinando os processos para obtenção de áreas de triângulos congruentes com aqueles de áreas de retângulos podemos obter a área do paralelogramo.

Qualquer lado do paralelogramo pode ser tomado como sua base e a altura correspondente é o segmento perpendicular à reta que contém a base até o ponto onde esta reta intercepta o lado oposto do paralelogramo.

No paralelogramo ABCD abaixo à esquerda, os segmentos verticais tracejados são congruentes e qualquer um deles pode representar a altura do paralelogramo em relação à base AB.

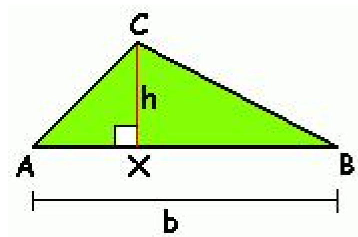


No paralelogramo RSTV acima à direita, os dois segmentos tracejados são congruentes e qualquer um deles pode representar a altura do paralelogramo em relação à base RV.

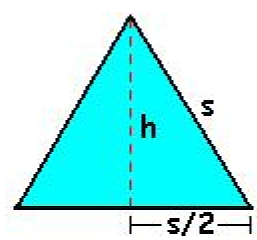
A área A do paralelogramo é obtida pelo produto da medida da base b pela medida da altura h, isto é, A=b×h. Demonstração da fórmula

Área do Triângulo

A área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura, isto é, A=b.h/2. Demonstração da fórmula



Exemplo: Mostraremos que a área do triângulo equilátero cujo lado mede s é dada por A=s²R[3]/2, onde R[z] denota a raiz quadrada de $z \geq 0$. Realmente, com o Teorema de Pitágoras, escrevemos $h^2=s^2-(s/2)^2$ para obter $h^2=(3/4)s^2$ garantindo que h=R[3]s/2.



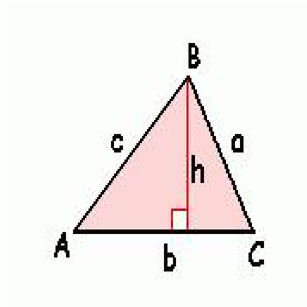
Como a área de um triângulo é dada por A=b.h/2, então segue que:

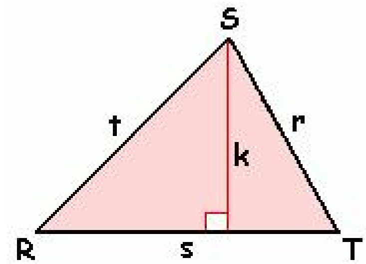
A = s × R[3] s/2 = ½ R[3] s²

Observação: Triângulos com bases congruentes e alturas congruentes possuem a mesma área.

Comparação de áreas entre triângulos semelhantes

Conhecendo-se a razão entre medidas correspondentes quaisquer de dois triângulos semelhantes, é possível obter a razão entre as áreas desses triângulos.



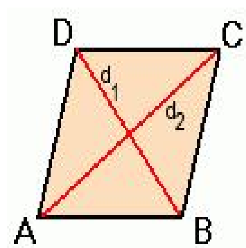


Propriedade: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de quaisquer dois lados correspondentes.

$$\frac{\text{Área de ABC}}{\text{Área de RST}} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{b^2}{s^2} = \frac{c^2}{t^2}$$

Área do losango

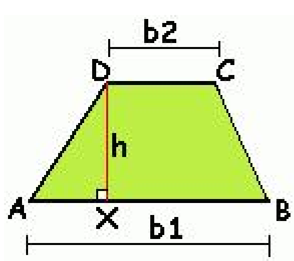
O losango é um paralelogramo e a sua área é também igual ao produto do comprimento da medida da base pela medida da altura.



A área do losango é o semi-produto das medidas das diagonais, isto é, $A=(d_1 \times d_2)/2$. Demonstração da fórmula

Área do trapézio

Em um trapézio existe uma base menor de medida b1, uma base maior de medida b2 e uma altura com medida h.

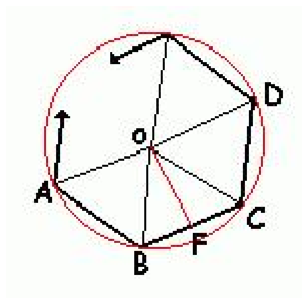


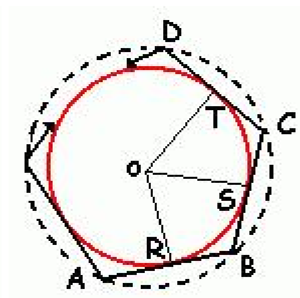
A área A do trapézio é o produto da média aritmética entre as medidas das bases pela medida da altura, isto é, A=(b1+b2).h/2.

Polígonos regulares

Um polígono regular é aquele que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes. Existem duas circunferências associadas a um polígono regular.

Circunferência circunscrita: Em um polígono regular com n lados, podemos construir uma circunferência circunscrita (por fora), que é uma circunferência que passa em todos os vértices do polígono e que contém o polígono em seu interior.

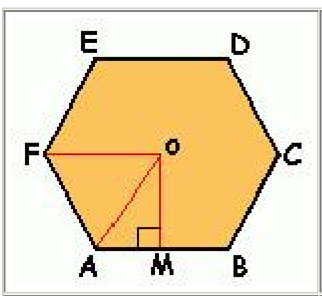
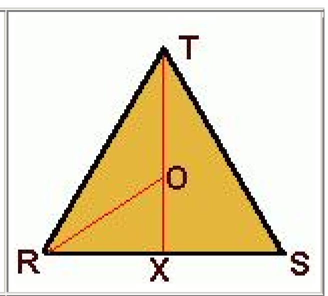




Circunferência inscrita: Em um polígono regular com n lados, podemos colocar uma circunferência inscrita (por dentro), isto é, uma circunferência que passa tangenciando todos os lados do polígono e que está contida no polígono.

Elementos de um polígono regular

1. Centro do polígono é o centro comum às circunferências inscrita e circunscrita.
2. Raio da circunferência circunscrita é a distância do centro do polígono até um dos vértices.
3. Raio da circunferência inscrita é o apótema do polígono, isto é, a distância do centro do polígono ao ponto médio de um dos lados.
4. Ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados contém vértices consecutivos do polígono.

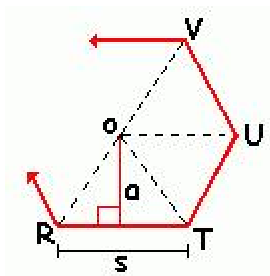
	
Apótema: OM, Raios: OA,OF	Apótema: OX, Raios: OR,OT

Ângulo central: AOF	Ângulo central: ROT

5. Medida do ângulo central de um polígono com n lados é dada por 360/n graus. Por exemplo, o ângulo central de um hexágono regular mede 60 graus e o ângulo central de um pentágono regular mede 360/5=72 graus.

Áreas de polígonos regulares

Traçando segmentos de reta ligando o centro do polígono regular a cada um dos vértices desse polígono de n-lados, iremos decompor este polígono em n triângulos congruentes.



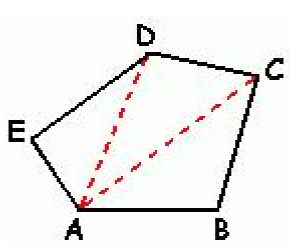
Assim, a fórmula para o cálculo da área da região poligonal regular será dada pela metade do produto da medida do apótema a pelo perímetro P, isto é:

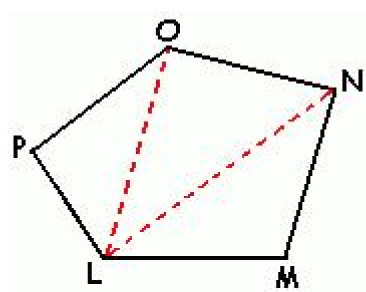
$$A = a \times \text{Perímetro} / 2$$

Demonstração da fórmula

Comparando áreas entre polígonos semelhantes

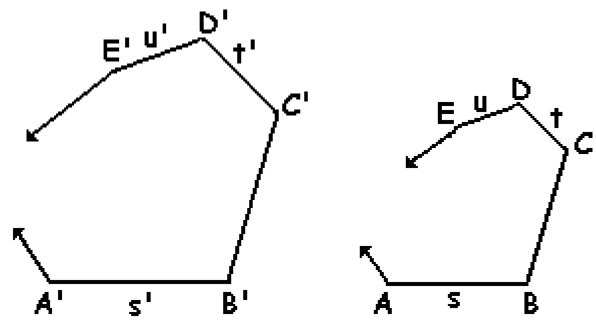
Apresentamos abaixo dois pentágonos irregulares semelhantes. Dos vértices correspondentes A e L traçamos diagonais decompondo cada pentágono em três triângulos.





Os pares de triângulos correspondentes ABC e LMN, parecem semelhantes, o que pode ser verificado diretamente através da medição de seus ângulos com um transferidor. Assumiremos que tal propriedade seja válida para polígonos semelhantes com n lados.

Observação: Se dois polígonos são semelhantes, eles podem ser decompostos no mesmo número de triângulos e cada triângulo é semelhante ao triângulo que ocupa a posição correspondente no outro polígono.



Este fato e o teorema sobre razão entre áreas de triângulos semelhantes são usados para demonstrar o seguinte teorema sobre áreas de polígonos semelhantes.

Teorema: A razão entre áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de quaisquer dois lados correspondentes.

$$\frac{\text{Área de ABCDE...}}{\text{Área de A'B'C'D'E'...}} = \frac{s^2}{(s')^2} = \frac{t^2}{(t')^2}$$